Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2017/2018**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Homomorphismes d'anneaux et idéaux - TD 2

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

2. Montrer que la composition des homomorphismes d'anneaux est aussi un homomorphisme d'anneaux.

3. Montrer $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a$ est un homomorphisme d'anneaux. Est-ce que f est un isomorphisme ?

4. Montrer que $f : \mathrm{Diag}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mapsto (a, b)$ est un isomorphisme d'anneaux.

5. Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Posons
$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) := (ac, bd)$ et $(a, b) \times (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$.
Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ sont des anneaux. Est-ce que les deux anneaux sont isomorphes ? Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

6. Est-ce que les anneaux $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont isomorphes ?

7. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que :
(a) $\mathrm{Im} f$ est un sous-anneau de S.
(b) $\mathrm{Ker} f$ est un idéal de R.

8. Montrer de 2 façons que $n\mathbb{Z} = \{nm \mid m \in \mathbb{Z}\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

9. Montrer de 2 façons que $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{R}[x]$.

10. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de S. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de R.